超越数を肴に人生を楽しむため

Manabu Sumioka

2021 年 1 月 19 日

目次

図目次

表目次

Listings

1 はじめに

$e = 2.718281828459045235360287471352...$

$$e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

や

$\pi = 3.141592653589793238462643383279 50...$

すなわち自然対数の底や円周率が超越数 (transcendential number) であることはそれぞれ 19 世紀には証明されている．しかし，超越数とは何だろうか．有理数や無理数のことはなんとなく知ってはいても「超越」という言葉からして何かあやしげな雰囲気がする数だ．

映画「トランスセンデンス (2014)」が公開された当時は，まだ日本での人工知能という言葉の意味が一般の人々には漠然としていて，その人々の意識の底流にはそういった技術は人間にとってはたぶん良い方向へ進化しているのだろうし，ＡＩもコンピューターやネットと同じく，そうなんだろうという程度の理解だった．

この映画では難解な会話が続く，そのためＩＭＤＢの評価も６．３止まりになっている．例えば，マックス (主人公ウィルの友人) と主人公の恋人エヴリンの会話をみてみよう．

この会話は，意識をコンピュータにアップロードした主人公が暴走をはじめたとき，マックスが「そいつをシャットダウンするんだ!」，するとエブリンが「えっ! これは彼 (HIM) なのよ!」といったときのもの．

> マックス：インターネットは世界を縮めたと言われるよね．でも人間が現実に感じとれる世界というのは，思ってるよりも小さいものなんだ．インターネットは関係ない．(中略)
> 僕は，研究者としての人生を脳を電磁パルスに置き換えることに集中してきたよ．でも失敗だった．人の感情は，論理矛盾に満ちてる．人は誰かを愛することはできる反面，お互いの過去の嫌なことも持ち続けることができる．でも，マシンはそんなことはできないし，友人関係を修復したりはできないものなんだ．
> エヴリン：ほんとにそう思ってるの？
> マックス：そうだ．

結末は，ＡＩとなったウィルは誰も殺さず，信念と愛をつらぬいてゆく．なんか哲学的で難解だが何か残る映画だった．

超越数もそうかもしれないが，この映画を鑑賞して味わう以上に，数学の基礎知識がいる．ちなみに，次のソースコードが理解できてる人は，はじめの基礎知識のとこは眺めればわかるはず．

Listing 1 atan2(1,1) を 4 倍し，円周率パイの近似値を得る．

```
$\pi$ = atan2(1,1)*4;
```

2　料理を味わう準備

2.1　積分

2.1.1　$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x) \tag{1}$$

2.1.2　$f(x)$ の原始関数と定数 C

$$F(x) + C \tag{2}$$

2.1.3　不定積分

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{3}$$

2.1.4　部分積分

$$\int u\left(\frac{dv}{dx}\right)dx = uv - \int v\left(\frac{du}{dx}\right)dx \tag{4}$$

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du \tag{5}$$

3　代数的数の話

1879 年頃から 19 世紀に発見された新しい数学的オブジェクトを道具として応用し，それまでできなかった問題解決に応用する傾向が数学全体に広がった．そのオブジェクトとは，行列，環，群，多様体などであった．現代では何だろうか，圏論がそのひとつにあたるのかもしれない．

「代数的数」はこのオブジェクトのひとつだ．

数をわかりやすいものから挙げてゆく，まず整数，次は分数を小学校で習う．この分数には有理数という名前がついていることをさらに上級の学校に進むと知るが，大学生になっても有理数の名前は知っていてもほとんどの学部ではその意味や性質を調べることはない．

$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ は習うがその無理数と有理数のあいだの溝の深さはほとんど考えることはない．

実際に学校ででてくるのは実数であって，これは小数として習う．

正の実数 a は小数に展開できるが，それは分母を 10 のべき乗にした有理数の和であるが，これもあまり深く学ぶことはない．

$$a = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

ここで，小数点以下の項 n を無限に大きくすることができそうに思える．そうすると小数は無限大になるのだろうか，いや無限大の小数というのは学校ではでてこない．そのことは，次の変形をやってみるとなんとなく納得できるだろう．

$$a_0.99999\cdots$$

は，

$$\begin{aligned} &= a_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} \\ &= a_0 + \frac{9}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} \\ &\leq a_0 + 1 \end{aligned}$$

このように小数を数列であらわしてみれば，この小数は n を無限大にしても和は $a_0 + 1$ を超えることがないことがわかる．上限は抑えられている．

またあるパターンが繰り返す小数 (循環小数) とそうでない小数 (有限小数) があることも中学生くらいで知る．

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &= 0.142857142857142\cdots \\ \frac{1}{8} &= 0.125 \end{aligned}$$

有理数は，有限小数か循環小数となる．逆もいえる．

実数で有理数でないものは無理数だから，$\sqrt{2}$ や π の小数点以下をずっと計算し，有限でなく循環もしないことがわかれば無理数と判定できるのだろうか．

それは小数点以下どれだけ計算しても判定できない．

無理数であることは背理法で証明される．

$\sqrt{2}$ が有理数だと仮定し既約分数 $= \frac{a}{b}$ の形にし両辺を 2 乗する．すると分母 a と分子 b について，それぞれ 2 の倍数，すなわち偶数だということがわかり，既約のはずなのに共通の約数 2 がでてくる．このことが仮定と矛盾するというやり方で証明するのがよく知られている．この他にもいくつもやり方はあるが，どれも背理法による．

π についても無理数であることの証明はある．しかし，これはとてもひと口では言えない．さらに，実は π は，「超越数」というものであることが証明されている．

前置きが長くなったが，この「超越数」という考えは「代数的数」というガウスやクンマーがその土台を築いたものから発生した．

3.1　多項式の根と代数的数

有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ とし次の多項式の根になる複素数を代数的数という．

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, a_i \in \mathbb{Q}$$

3.2　代数的数と超越数

複素数は代数的数と超越数に分けられる．

ある数が超越数であることを証明するには，その数が代数的数であると仮定して矛盾をみちびくしか方法はない．

これは無理数であることを証明するのに，有理数であると仮定して矛盾を引き出すやり方と同じ背理法になる．

無理数であることを証明するためには，有理数とはどんなものかということをよく理解しておく必要がある．同様にして，超越数であることを証明するためには，代数的数と性質をよく知っておかねばならない．

このようなわけで超越数の証明には，代数的数のもっとも簡単な例として整数がでてくる．この整数には，これまた非常にシンプルでかつ強力な事実がある．それは，整数の絶対値は 1 以上であるという明白な事実だ．

3.3 エルミートの方法と部分積分

$$I(t) = e^t \int_0^t e^{-t} f(x) dx \tag{6}$$

複素平面上の複素数 t は積分路 0 と t を結ぶ曲線で，$f(t)$ は多項式である．

部分積分をくりかえすと，

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t) \tag{7}$$

となる．

ここで，m は，$f(x)$ の次数，$f^{(j)}(t)$ は，j 階導関数．

積分 $I(t)$ において，

$$f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \cdot (x-n)^p \tag{8}$$

とする．

さらに，

$$J = -(a_0 I(0) + \cdots + a_n I(n)) \tag{9}$$

とおき，絶対値 $|J|$ を上下から評価し，矛盾をみちびく．

このとき，$f^{(j)}(k)$ が整数であり，したがって J は整数になることがポイントになる．

3.4 自然対数の底が超越数であることを証明した歴史

1873 年にパリでエルミートが発表した．論文「Sur la fonction exponentielle」

e の無理数性は，オイラーにより 1744 年までには確定されていた．リューヴィルが 1840 年に証明した．この証明は背理法によるものではなく，e を定義する級数から直接証明したものであった．

エルミートの手法が新しい時代をきりひらいたのは間違いない．リンデマンがエルミートの手法を一般化することで π の超越性を証明した．

エルミートとリンデマンの仕事は 1885 年にワイエルシュトラウスにより単純化され，さらにヒルベルト，フルビッツ，ゴルダンによってもっと単純化された．[1] p.3.

4　円周率の超越性

1882 年リンデマンにより円周率 π が超越数であることが証明された．これにより古代ギリシアからの円の正方形化問題は証明により否定された．

超越数というオブジェクトにより長年の問題が証明されたひとつの例となった．

5　Perl について

Perl のバージョンは原則として

Listing 2　Perl バージョン 5

```
perl -version
This is perl 5, version 30, subversion 0 (v5.30.0)
built for x86_64-linux-gnu-thread-multi
```

を使用した．

Perl 5 のより詳細な設定は，*perl -V* で知ることができるが，その必要は無い．ふつうにインストールされたものそのままでよい．特別なことの他は．

特別なというのは，e や π が無理数である証明や超越数である証明をするようなものである．

6　無理数の証明

無理数の証明をする前に e や π が整数でないことは自明としてもかまわないだろう．[*1]

6.1　2 の平方根が無理数であることの証明

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すれば矛盾がおこることから，2 の平方根は有理数ではなく無理数であるとするやり方の証明でやってみる．いわゆる背理法による証明のひとつである．

$\sqrt{2}$ が有理数だと仮定すると，整数 a, b により $\frac{a}{b}$ の分数でかける．

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

ここで，a と b は 1 しか共通の約数をもたないとする．これを a, b が互いに素であるという．また最大公約数が 1 であるといってもよい．要するに既約分数である．

両辺に b をかけて 2 乗すれば

$$2b^2 = a^2$$

[*1] ある時期，学校で π を 3 であると教える，というようなことがあったようだが．さらにそれが入試問題の中にも使われて一部の教員が激怒した場面を目撃したこともあった．まさか π が整数の世界に迷い込むとは SF 小説のようだった．

となる．

この式から a^2 は偶数である．奇数は 2 乗しても奇数であるから，a は偶数となる．

そこで，

$$a = 2A$$

とかける．これをもとの式に代入する．

$$2b^2 = 4A^2$$

すると b も偶数であることがわかる．これは，a, b がどちらも 2 の倍数であることになり，共通の約数 2 をもつことになって矛盾する．

したがって $\sqrt{2}$ は無理数でなければならない．という証明が背理法です．英語では *proof by contradiction* といいます．ラテン語では *Reductio ad absurdum* なので英語では *reduction to absurdity* ともいいます．Absurdity とは，不条理あるいは荒唐無稽，愚劣のような意味になります．背理法を用いるときは不条理という言葉が意味として適当でしょうか．まあアホクサ！と言っては品が無くなりますから．

ただ，有理数でなければ無理数なの？ホントにそうなんだろうかという疑問がでるかもしれませんが，分数の形でかけないものなのでその定義から無理数ということになる．

もちろん円周率も自然対数の底も分数ではかけない．したがって無理数ということになる．

それでは，円周率も 2 の平方根もおなじ無理数なのだろうか．

7 無理数と代数的数と超越数

身近な数の集合をあげてみる．

自然数全体，整数全体，有理数全体，実数全体，複素数全体

$\mathbb{N}$	$1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$	自然数全体の集合
$\mathbb{Z}$	$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$	整数全体の集合
$\mathbb{Q}$		有理数全体の集合
$\mathbb{R}$		実数全体の集合
$\mathbb{C}$		複素数全体の集合

ここで $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ の包含関係があります．

この 5 つのアルファベットで代表される数の集合を，「Nine Zulu Queens Ruled China」で覚えるというやり方があるようだが，日本人向けではない．日本語では，

それでは代数的数と超越数は，これらの 5 つの集合とは，どのような関係なのか．

8 0.12345678910111213⋯

参考文献

[1] Alan Baker. *Transcendental number theory.* Cambridge University Press, Cambridge UK. 1975.

[2] 高木貞治．初等整数論講義第 2 版．共立出版，東京都文京区．1971.

[3] 高木貞治．代数学講義改訂新版．共立出版，東京都文京区．1965.

[4] Randal L. Schwartz, brian d foy & Tom Phoenix. *Learning Perl 7th Edition - MAKING EASY THINGS EASY AND HARD THINGS POSSIBLE.* O'REILLY. 2016.

[5] Tom Christiansen, brian d foy & Larry Wall. *Programming Perl 4th Edition.* O'REILLY. 2012.

[6] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming, VOLUME 1 Fundamental Algorithms Third Edition.* ADDISON-WELEY. 1997.