作図不能問題から無理数の起源について窪田忠彦『初等幾何学作図問題』1951 から考えたこと

Manabu Sumioka

2020 年 11 月 15 日

目次

図目次

表目次

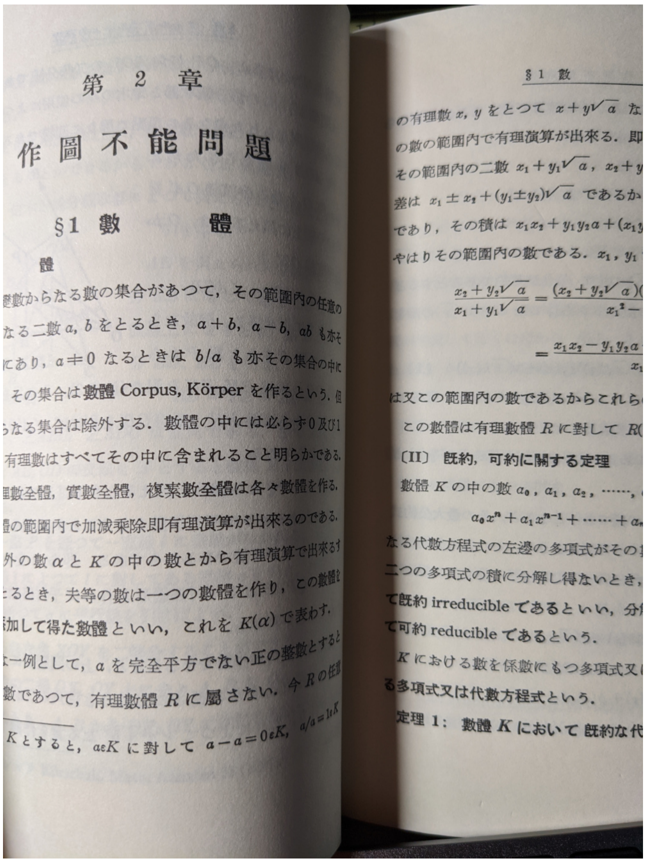
1　はじめに

> 世界的にその価値を認められ，日本の数学の勃興に大きな貢献を与えた『東北数学雑誌』の創始者林先生今は亡く，藤原，石原，窪田，掛谷の諸先生も逝去され，私一人だけになってしまった．
>
> 小倉金之助「独立心について」- *1952.12.18*

第 2 章「作図不能問題」は，第 1 章の直線と円，すなわち定規とコンパスで作図できない問題を扱っている．そのために章のはじめに初等整数論と代数学にふれ，それらを応用した内容になっている．

そこで，第 1 章では整数と有理数の比から出発し作図可能の問題を解いてきたが，作図不能問題を証明することになり，整数と有理数を超え抽象数学にふみこんでいる．

初等整数論，代数学の解説を中学生向きに加えながら読み進んでいくことにする．抽象的な概念だけの説明では理解がむずかしいところは具体的な計算と歴史的なことがらなど蛇足と思われるものも入れてゆく．


第 2 章

作圖不能問題

§1 數　體

體

數からなる數の集合があつて，その範圍內の任意の
なる二數 a, b をとるとき，$a+b$, $a-b$, ab も亦そ
にあり，$a \neq 0$ なるときは b/a も亦その集合の中に
その集合は數體 Corpus, Körper を作るという．但
らなる集合は除外する．數體の中には必らず 0 及び 1
有理數はすべてその中に含まれること明らかである．
理數全體，實數全體，複素數全體は各々數體を作る．
體の範圍內で加減乘除即有理演算が出來るのである．
外の數 α と K の中の數とから有理演算で出來るす
るとき，夫等の數は一つの數體を作り，この數體を
添加して得た數體といい，これを $K(\alpha)$ で表わす．
な一例として，a を完全平方でない正の整數とすると
數であつて，有理數體 R に屬さない．今 R の任意

K とすると，$a \epsilon K$ に對して $a-a=0 \epsilon K$, $a/a=1 \epsilon K$

§1 數

の有理數 x, y をとつて $x+y\sqrt{a}$ な
の數の範圍內で有理演算が出來る．即
その範圍內の二數 $x_1+y_1\sqrt{a}$，x_2+y
差は $x_1 \pm x_2+(y_1 \pm y_2)\sqrt{a}$ であるか
であり，その積は $x_1x_2+y_1y_2a+(x_1y$
やはりその範圍內の數である．x_1，y_1

$$\frac{x_2+y_2\sqrt{a}}{x_1+y_1\sqrt{a}}=\frac{(x_2+y_2\sqrt{a})(}{x_1^2-}$$

$$=\frac{x_1x_2-y_1y_2a}{x_1}$$

は又この範圍內の數であるからこれら
この數體は有理數體 R に對して $R($
〔II〕 既約，可約に關する定理
數體 K の中の數 a_0，a_1，a_2，……，

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

なる代數方程式の左邊の多項式がその
二つの多項式の積に分解し得ないとき，
て既約 irreducible であるといい，分
て可約 reducible であるという．
K における數を係數にもつ多項式又
る多項式又は代數方程式という．
定理 1: 數體 K において 既約な代

図1　第 2 章「作図不能問題」は数体と $\mathbb{K}(\alpha)$ から議論をはじめている

2　数体

窪田は，数の集合から数体を次のように定義している．

> 常数又は変数からなる数の集合があって，その範囲内の任意の同じ又は異る二数 a, b をとるとき，$a+b, a-b, ab$ も又その集合の中にあり，$a \neq 0$ なるときは，b/a もまたその集合の中にあるならば，その集合を Corpus,Körper を作るという [1]p.32.
> 数体の中には必ず 0 及び 1 が含まれ，有理数はすべてその中に含まれること明らかである．

ここで Körper は，ドイツ語で体のことである．

1951 年当時は，ドイツ語由来の用語がつかわれていたようだが，現代風には field F をつかって「体 F を取る」というような言い方をする [6]p.10.

ただし，英語のフィールドという言葉は理論物理学で「場の理論」などと使われることがあり，それは体とは別の意味をもっており，「電磁場」などのフィールドである[*1].

体の中では，四則演算 $+$，$-$，$\times$，$\div$ ができる．簡単な電卓のイメージを思い浮べるとよい．

体の中の元について，四則演算をした結果が同じ体の中にあるとき閉じているという．$\mathbb{N}$ も $\mathbb{Z}$ も体ではない，整数同士の割り算は，整数ではないことがあるからで，自然数についても同様だ．

有理数全体の集合は，加減乗除をしても閉じているから，体 $\mathbb{Q}$ をなす．有理数体 $\mathbb{Q}$ は重要な体であることがあとでわかってくる．実数全体の集合，複素数全体の集合もそれぞれ体 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ をなす．

ここから先の話になるが，ここまででも体についての素朴な疑問がでてくる．$\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ のほかに体はないのだろうか？答は，いくつかある．いくつかのタイプの体がある．ひとつ目は，有限体である．有理数も実数も複素数も無限に元があるが，たとえば，3 つの元しかない有限体をつくることができる．有限体はガロア体とも呼ばれる．ほとんどの人がなぜか名前だけは知っているエヴァリスト・ガロアである．名前は知っていてもガロアの理論を理解している人は，自分の住んでいる町や村に大学があったとしても数人もいるかどうかわからないのが現状だ．なんならたしかめるために「ガロア理論の中心的な概念は，群環体のうちのどれか？」と質問してみる手もある．もうひとつは，拡大体である．窪田も無理数をひとつ有理数体に添加した $\mathbb{K}(\alpha)$ を窪田 [1]．32 にとりあげている．なぜ有理数体に無理数をひとつだけ添加するようなことをするのだろうか．教科書ではこのような何故という素朴な疑問にすぐには答えが書いてない．たぶん教師の役目だろう．それは方程式を解くためである．有理数体の係数をもつ方程式の中には $\mathbb{Q}$ のなかには解がないものがあるためである．体を拡張することによって，それまで解けなかった方程式を解くことができる．これまでに．$\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ のほかに，有限体と拡大体をあげたが，まだある．窪田にもそれはでてくる．35 ページからの多項式に関する定理でつかわれている．

多項式の比を有理関数と言うが，この有理関数は四則演算をした結果が閉じている．すなわち有理関数は体をなしている．この有理関数の四則演算は手間はかかるが中学生でもできるだろう．ただ，有理関数の体は，多項式の係数が体をとるとして，その係数の体に依存している．その意味では体の拡大である．

---

*1 筆者は 2001 年に『俳句の「場」としてのインターネット』をドイツ人らと共著で出版したことがあるが，あとから海外での HAIKU は自由で束縛がなくどちらかといえば体といってもよいと考えた．HAIKU には，季語も 5・7・5 の形式もない．

2.1　集合と元

集合と「その中にあるもの」すなわち元についての関係は記号で次のように表わす．

$x \in A$ は，x が集合 A の元であるということを示す．

集合同士の「和，積，含む」などの記号は次のようになる．

$A \cup B$，和
$A \cap B$，積
$A \subset B$，集合 A が B に含まれる，ここではこれは $A = B$ も含むことにする．

集合を次のような書き方で定めることがある [6].

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x < 2\}, \{z \in \mathbb{C} \mid 3z^2 + 6z = 1\}$$

左の $\mathbb{R}$ は，$-6 \leq x < 2$ となる実数 x 全体の集合である．
右の $\mathbb{C}$ は，$3z^2 + 6z = 1$ となる複素数 z の集合である．実際には，$z = -2$ と $z = 0$ の 2 つの実数であるがそういう集合を定義している．
空集合は，$\varnothing$ で表すから，次の集合は $\varnothing$ である．

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7 = 0\}$$

2.2　数の集合と記号

窪田は，

「有理数全体，実数全体，複素数全体はそれぞれ数体を作る．」と表現している．

体を解説する前に数学で使う数の集合について，その記号を示す．
整数も含め，有理数，実数，複素数をあらわす集合は次のように表現されるのが一般的になっている．

$\mathbb{Z}$，整数 (正負ともに，0 も入れた) 全体の集合. 記号 Z の由来は，ドイツ語で数を意味する *Zahlen* から．ちなみに図形は *Fuguren*. 有名なラーデマッヘルとテープリッツの『数と図形』[4] のドイツ語原題は *Von ZAHLEN und FIGUREN*.
$\mathbb{Q}$，有理数全体の集合．記号 Q の由来は，英語の商を意味する *Quotient* から．
$\mathbb{R}$，実数全体の集合
$\mathbb{C}$，複素数全体の集合

自然数全体の集合もあわせ，整数全体，有理数全体，実数全体，複素数全体をあらわす集合は次のような記号であらわされる．

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

2.3 Nine Zulu Queens Ruled China

ジョン・ダービーシャーの『代数に惹かれた数学者たち』[9] では，この中抜きアルファベットの覚えかたを「Nine Zulu Queens Ruled China」と書いている．ロシアのマトリョーシカ人形のように入れ子構造になっていて，一番内にあるのが自然数の $\mathbb{N}$ で整数，有理数，実数と続き，一番外側には複素数の $\mathbb{C}$ があるという喩え話で数の概念を説いている．

もちろん Nine Zule Queens Ruled China の文に意味はない．

窪田 [1] は，有理数体を $\mathbb{R}$ と表記しているが，これは実数全体の集合とまちがえやすいため，ここでは $\mathbb{Q}$ とする．R としたのは，*rational* すなわち 2 つの整数比 (ratio) が語源となり整数比，分数 $\frac{p}{q}$ の形になる *rational* を有理数と訳したことに原因というか責任があるのかもしれない．ちなみに有理数でない実数を無理数という．

集合のなかで体となるためには条件がある．

2.3.1 「問」

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は，それぞれ体である．しかし，$\mathbb{Z}$ は体ではない，なぜか？

> 「解答」体とは，そのなかで加減乗除ができる数の集合である．
>
> たとえば，$1, 3 \in \mathbb{Z}$ であるが，この 2 つの整数について除法を行なうと整数でなくなることがある．
>
> $1/3 \notin \mathbb{Z}$ のように 3 を除数にして除法を実行すると整数の集合の元ではなくなってしまう．

窪田は，

> 「即ち，各数体の範囲内で加減乗除即有理演算が出来るのである．」と表現している．

ガウスの『整数論』による表現を真似ると，高等的 *arithmeticae* を対象に，これから議論をすることになる．ユークリッド『原論』では，第 7 巻以降である．

2.4 有理数体，実数体，複素数体

2.4.1 有理数体

有理数においては，加法，減法，乗法，除法ができる．このように四則計算ができ，結合法則，分配法則，交換法則の計算法則が成立する集合を体 (タイ，field) という．

> したがって，有理数全体を有理数体と呼び $\mathbb{Q}$ で示す．

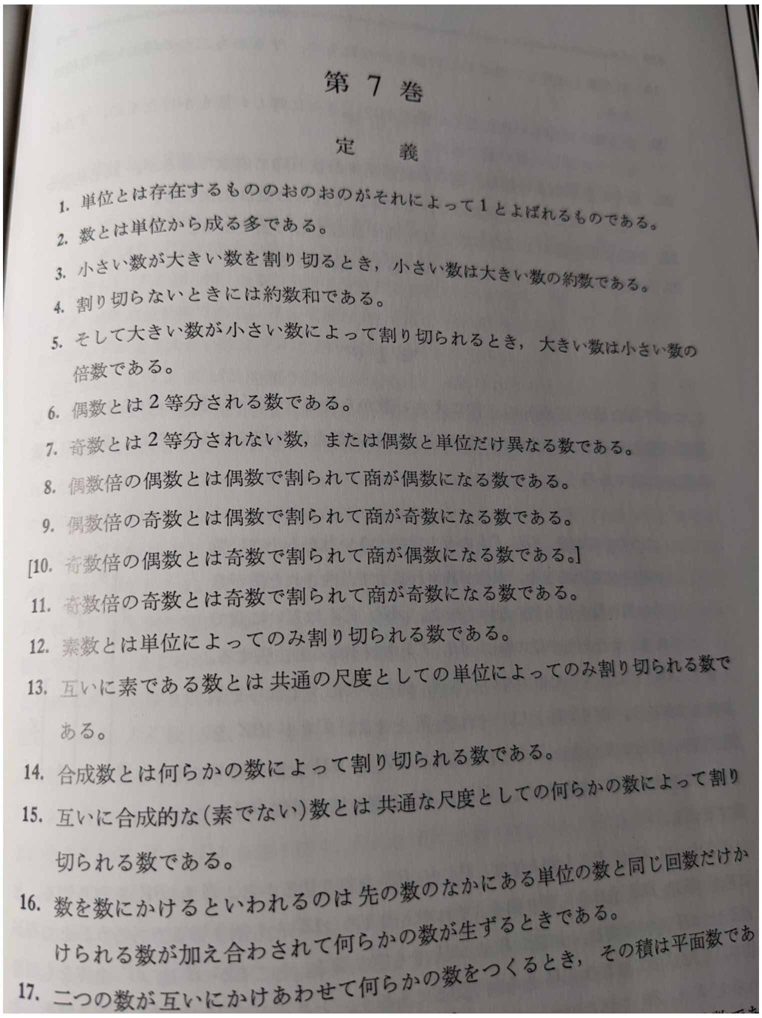
2.4.2 実数体

実数も，四則計算ができ，結合，分配，交換の計算法則がなりたつ．

> 実数体を $\mathbb{R}$ で示す．

2.4.3 複素数体

複素数も，四則計算ができる


第 7 巻

定 義

1. 単位とは存在するもののおのおのがそれによって1とよばれるものである。
2. 数とは単位から成る多である。
3. 小さい数が大きい数を割り切るとき，小さい数は大きい数の約数である。
4. 割り切らないときには約数和である。
5. そして大きい数が小さい数によって割り切られるとき，大きい数は小さい数の倍数である。
6. 偶数とは2等分される数である。
7. 奇数とは2等分されない数，または偶数と単位だけ異なる数である。
8. 偶数倍の偶数とは偶数で割られて商が偶数になる数である。
9. 偶数倍の奇数とは偶数で割られて商が奇数になる数である。

[10. 奇数倍の偶数とは奇数で割られて商が偶数になる数である。]

11. 奇数倍の奇数とは奇数で割られて商が奇数になる数である。
12. 素数とは単位によってのみ割り切られる数である。
13. 互いに素である数とは 共通の尺度としての単位によってのみ割り切られる数である。
14. 合成数とは何らかの数によって割り切られる数である。
15. 互いに合成的な(素でない)数とは 共通な尺度としての何らかの数によって割り切られる数である。
16. 数を数にかけるといわれるのは 先の数のなかにある単位の数と同じ回数だけかけられる数が加え合わされて何らかの数が生ずるときである。
17. 二つの数が互いにかけあわせて何らかの数をつくるとき，その積は平面数であ

図2 『原論』第 7 巻

複素数体を $\mathbb{C}$ で示す.

2.5 無理数体はむり

1. 無理数は有理数でない実数である．ところで実数は加減乗除について閉じている．しかし，実数から有理数をとりのぞいた無理数は加法，減法について閉じていないことがすぐわかる．また，乗法，除法についても同様に閉じていない.
2. したがって，無理数の集合は体をなさない.
3. しかし，その存在は古くから知られている．面積が 2 倍の正方形の一辺はもとの正方形の辺の何倍か？のように平方根と関係する．たとえば,
   2 の平方根 $\sqrt{2}$ は有理数ではない．これは人類が最初に認識した無理数である.
4. しかし平方根をとれば無理数になるかといえば，すぐわかるように,
   完全平方の数，$4, 9, 16, 25, \ldots$ については平方根をとっても無理数にはならない.

5. 完全平方数でない数は，無理数になる．(ここを窪田は p32 で採用)
6. では，平方根を拡大した累乗根ではどうなるだろうか．
   一般に自然数の累乗根，(べき根) がいつ無理数になるかは発展的問題だ．
   たとえば，プラトンの『テアイテトス』には，p が 17 以下の素数のとき $\sqrt{p}$ が有理数でないことが述べられている．

窪田 [1] で，「各数体の範囲内で加減乗除即有理演算が出来る」と記した意図に，これから有理数体について述べるが無理数体はむりと言いたかったのではないか．

ここで蛇足かもしれないが，窪田がわざわざ「有理演算」といってるのはどうしてなのか気になった．そこで「無理数論」が登場した古代ギリシアのプラトンの著作『テアイテトス』にある知識とは何か？についての対話篇の一部を引用することにする．この知識についての根源的な問いにソクラテスが数学者テアイテトスとどのような対話をするのだろうか？さて，根，root という言葉はどうも木の根っこから発生したようだ．平方根，square root の形 $\surd$ がそもそも木の根の形3を示しているという．初等整数論でいう根の概念のルーツだろうか，ソクラテスとテアイテトスの対話を聞いてみたい．このあたりが無理数論のはじまりであったといわれる．

図3　2 と根号，木と根 (ね)

2.6　数学史の中でのテアイテトス (Theaetetus of Athens(c.417-c.369 BC))

プラトンの著作に『テアイテトス (Theaetetus)』がある．古代ギリシアの数学者であった Tehaetetus of Athens (c. 417-c. 369 BC) は，無理数論を展開した．その業績は，ユークリッドの原論第１０巻に収められている[*2]．また彼は，ソクラテスとプラトンの友人であった．プラトンによるソクテスの対話篇で「知識のもつ性質についての対話」で登場しソクラテスとの議論がはじまる．

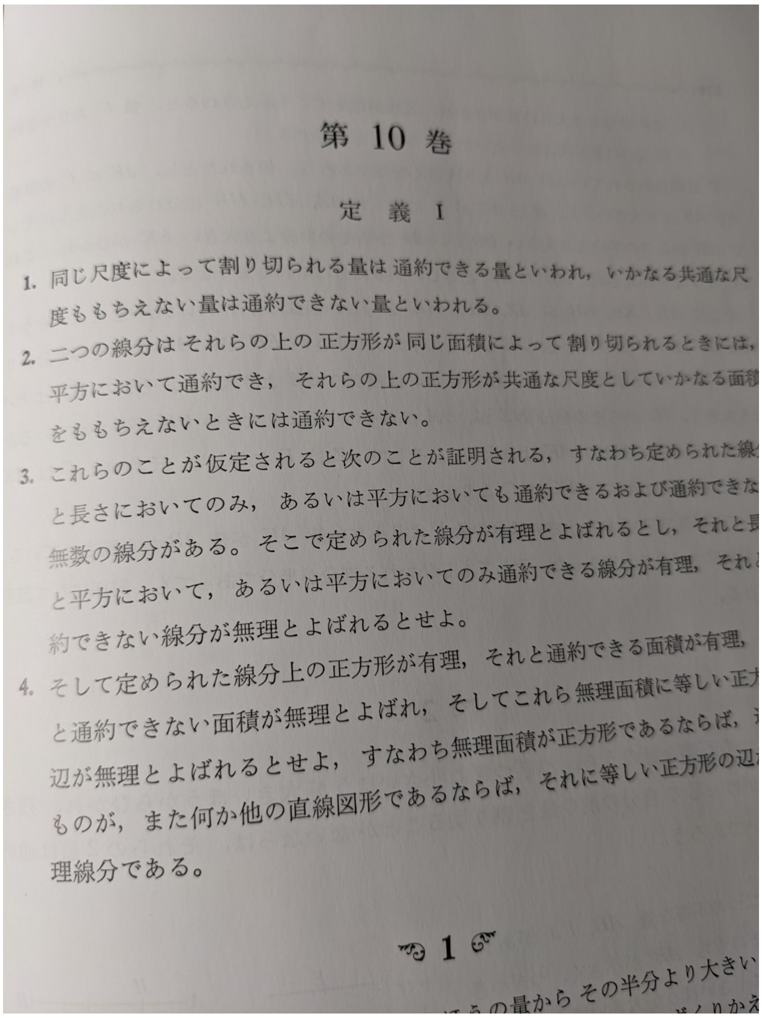
テアイテトスとソクラテスのやりとりが，なかなか楽しく，愉快なので少し引用しておく．

知識とは何か？についての議論がつづけられている……

ちょっと長くなるが，引用させてもらう．[2]p.25 から p.28 まで．

ソクラテス：従って，知識をだね，何か？と問われて，何か技術の名前を答える者があるならば，その

[*2] 定義 I 1. 同じ尺度によって割り切られる量は通約できる量といわれ，いかなる共通な尺度ももちえない量は通約できない量といわれる．[3] p.225 ，2. - 4. は省略．


第 10 巻

定 義 I

1. 同じ尺度によって割り切られる量は通約できる量といわれ，いかなる共通な尺
度をももちえない量は通約できない量といわれる。
2. 二つの線分はそれらの上の正方形が同じ面積によって割り切られるときには，
平方において通約でき，それらの上の正方形が共通な尺度としていかなる面積
をももちえないときには通約できない。
3. これらのことが仮定されると次のことが証明される，すなわち定められた線
と長さにおいてのみ，あるいは平方においても通約できるおよび通約できな
無数の線分がある。そこで定められた線分が有理とよばれるとし，それと
と平方において，あるいは平方においてのみ通約できる線分が有理，それ
約できない線分が無理とよばれるとせよ。
4. そして定められた線分上の正方形が有理，それと通約できる面積が有理，
と通約できない面積が無理とよばれ，そしてこれら無理面積に等しい正方
辺が無理とよばれるとせよ，すなわち無理面積が正方形であるならば，
ものが，また何か他の直線図形であるならば，それに等しい正方形の辺
理線分である。

1

その量から その半分より大きい

図4　原論 10 巻 [3]

答は笑止な答えなのである．なぜなら，それは何かの知識であるものをひとつ答えているわけなのであるが，問われたものはそんなものではないのだから．

テアイテトス：ええ，それはそうのようです．

ソクラテス：次にそれは，いいかね，手軽にまた手短に答えることが出来るのに，際限ない廻り道をしていると思われるのだ．たとえば泥土の問題にしても「何 (者) の (つかう)」などということにはてんから触れずに，「土が水にまざると泥土なのである」と言えば，思うに手軽でまた簡単だったのである．

テアイテトス：はい，それはソクラテス，そうすればたやすかったのだということが今になるとはっきりわかります．そういえばしかし，どうやらお尋ねの問題と同類らしいものが，最近に私とそれからあなたと同名のこのソクラテスとで言論を交えておりました時，ちょうどこの私たちの間にも入り込んで来たことがあります．

ソクラテス：ほう，それは一体どんなふうなものだったね，テアイトス．

テアイテトス：それは「ある種の」平方根について，すなわち三平方尺の正方形や五平方尺の正方形の辺にあたるもの (すなわち $\sqrt{3}$ と $\sqrt{5}$ など) について，私たちのためにこのテオドロスさんは図形のあるものを描きながら，それは長さのままで計ると一平方尺の正方形の辺 (すなわちこの場合は通約することの出来ない) ものであるということを明らかにされて行って，そして十七平方尺の正方形の辺 (すなわち $\sqrt{17}$) までをおのおの一つ一つ取り出してそういうふうにしてくだすったのですが，それまで来て，どうということはありませんでしたが，それを止められたのでした．そこで私たちの間には何かこんなふうな考えが浮かんで来たのです．それはこの種の (いまは正方形の辺として示されたところの) 平方根というものは無限に多くあるももだということが明らかなのですからして，これを一つに総括することを試みようという考えなのです．つまりこの種の平方根をわれわれが全部その言い方で呼べるようになるものを見出そうとする試みなのです．[*3] [*4]

ソクラテス：そして，どうだね，何かそのようなものを君たちは見つけたのかね．

テアイテトス：ええ，見つけたように私には思われるのですが，しかし，まあ，あなたにも見ていただきましょう．

ソクラテス：言ってみたまえ．

テアイテトス：数を全体として私たちは二つに分けました．その一つは，等しいものの掛け合せとなることが出来る (例えば $4 = 2 \times 2$ のようなもので，図形でいえば正方形に比すべきものであるとしまして，これを私たちは正方形数とか等辺数などという名前で呼ぶことにしました．

ソクラテス：うん，それはまたうまい呼び方だ．

テアイテトス：次はその (4 と 9，9 と 16 などの) 中間にはさまれている数で，そのうちには 3 もありますし，5 もあります．つまり等しいものの掛け合わせとなることが出来ずに，あるいは大きい数に小さい数を掛けたものとなり，あるいは小さい数に大きい数を掛けたものとなるだけのものはすべてそうなのでして，(図形の上では) これを囲む辺は常に一方が大きくて，他方が小くなるようなものなのですから，これを別にまた私たちは長方形に比すべきものとして，長方形数と名づけました．

ソクラテス：うん，それは大へん美事だ．が，とにかくまあ，その後をどうしたのか聞かせてくれたまえ．

テアイテトス：その平方が平面を囲む等辺数となる限りの線分は，これを「長さのままで通用出来るもの」と定め，またその平方が不等辺数となる限りの線分 (つまり $\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}$ などの長さの線分) は，長さのままでは前者の線分との通約 (すなわち共通の単位によって計りきれること) が出来ないけれども，それの平方によって得られる平面をもってすればその通約が出来るという意味で，これを「特に平方根としてのみ用いられるもの」(つねに何らかの正方形の辺という形でだけ考えられるもの，いわゆる不尽根) と定めました．そして立方体についても別にまたこれと同様のことが言われるわけです．

ソクラテス：いや，これは世にもあっぱれな出来ばえだったねえ，少年諸君．これならテオドロスさ

[*3] このテアイトスのソクラテスへの説明，三平方尺のからはじめて「十七平方尺の正方形の辺，$\sqrt{17}$ までを……」のくだりでふと，どうして 17 までなんだろう？と疑問に思ったひとは少なくないはず．ここは，あとで説明したい．

[*4] プラトンとテアイテトスの師である， 付録 D による $\sqrt{2}$ から $\sqrt{17}$ までの螺旋図がある． D.0.1

ん付録 Dも偽証の罪なんかに問われるおそれはあるまいと僕は思う．

さて，続きは，『テアイテトス」5を読んでいただきたい．無理数論のほかに，ソクラテスの産婆術なども面白い．

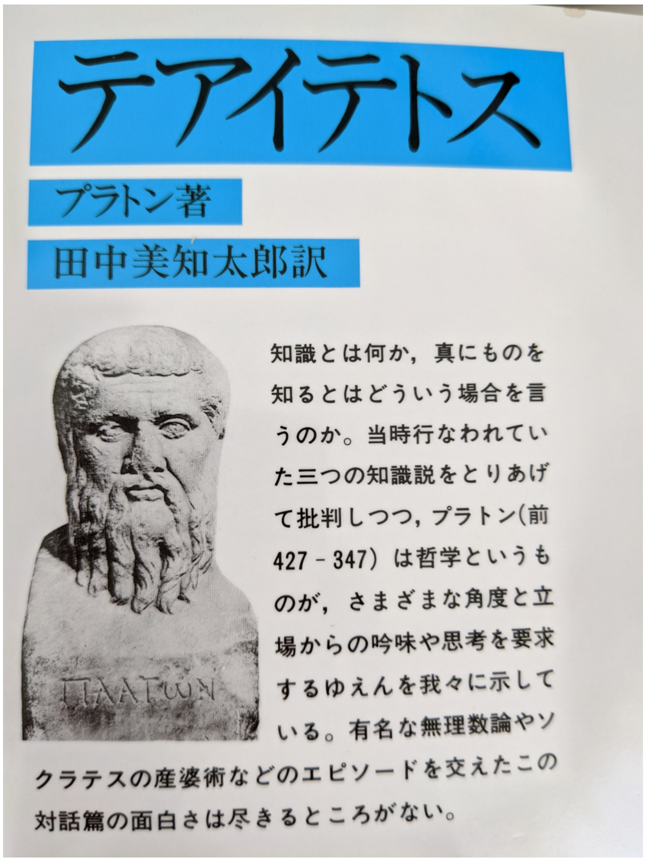


図5　岩波文庫，プラトン著，田中美知太郎訳『テアイテトス』表紙

3　有理数体に無理数を添加

有理数体に 2 の平方根を添加したものを次のような記号で書く．

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

窪田は，[1]p.32 で $\mathbb{K}$ に α を追加するやり方で無理数 α を有理数体 $\mathbb{K}$ に入れても体となることを示している．

ここから先は，いきなり中学生向けかという計算になっているようだ．

3.1 体の例

窪田 [1] の第 2 章は，「$\mathbb{K}$ に α を添加して得た数体」すなわち $\mathbb{K}(\alpha)$ という数体上で，代数方程式，多項式についての定理を証明している [1]p33,p35.

ここでは少し，基本的な計算からはじめる．

有理数 a, b と無理数 $\sqrt{2}$ から

$$a + b\sqrt{2}$$

の形に書ける数全体の集合を

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

と書くと，これは体になる．ここでは無理数の具体的な代表として $\sqrt{2}$ を選んだが，無理数の集合の元ならどれでもよい．

実際に $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ において加減乗除をたしかめてみよう．中学生のように．

a, b, c, d は有理数であるとする．

加法

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

減法

加法と同様であることがわかる．

乗法

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}$$

除法

除法については，0 でない $a + b\sqrt{2}$ の逆元が $a' + b'\sqrt{2}$ の形になればよいことを示す．

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} \cdot \frac{a - b\sqrt{2}}{a - b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$$

ここで，$a^2 - 2b^2 \neq 0$ であることに注意する．なぜなら，a, b は有理数であるにもかかわらず，$\sqrt{2}$ が無理数であるから．

したがって，右辺は $a' + b'\sqrt{2}$ の形になることがわかる．

4 群・環・体

群・環・体について概念の導入からはじめる．

古の時代から数や図形をとりあつかうことから出発した数学は，しだいにその対象とする物が具体的な数や図形だけではなく，数についての四則演算や図形についての操作をふくめて，演算や操作を物としてとりあつかうことになっていった．歴史的にはライプニッツが関数という概念をつくり上げたあたりから，ある変量とある定数をもとにして，あたらしい変量が生まれるという抽象化への一歩がはじまったような気がする．

日本で，function は函数とよばれていたが，小中学校で習う漢字群のなかになかったため，関数になったといういきさつがある．函数のほうがブラックボックスという箱をイメージさせより元の function に近かったと昔，中学生のとき教師から聞いた記憶はいまでも残っている．

4.1　算法の性質による分類

算法の具体的な例を上げてみる．

加減乗除の四則演算　数についての二項演算
図形の合同変換　初等幾何学
方程式を解く　解析学

これらは，群・環・体という概念で，数学ではどのようにとりあつかわれるのだろうか．

数学は，代数学，幾何学，解析学の三つの分野に分けられる．

英語では群 (group)・環 (ring)・体 (field) である．英語もふくめた，だいたいほとんどの代数学の教科書でこの順番に，これらの抽象的な概念が登場する．

代数学は，幾何学や解析学など具体的な対象物から抽出された抽象的な構築物でできあがった世界をとりあつかうために，これらの群・環・体といった抽象的な概念がつかわれる．

群　は，四則のうち乗法だけが許された世界．二項演算のかけ算だけ．
環　は，加法と乗法の二つが許された世界．ただし二項演算の足し算とかけ算は分配律で関係している．

ここで二項演算といっても，数の四則演算だけでなくいろいろなものがあることから抽象の世界に入っていく．

ただ，これらの用語を定義する前に窪田の第 2 章にある具体例からはじめてゆく．途中で，環とか体の考え方のもとになるものを入れる．

5　有理式と体

前に述べた，有理数体，実数体，複素数体 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ からはじめる．

一般に体 $\mathbb{F}$ は，$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のどれかであり，そのひとつであると言ってよい．しかしここで止まってしまってはつまらない．もっと体をさがすことにする．テキストのように体の定義をしてからではなく厳密な話はあとまわしにして進む．

さて，窪田では，読者の予備知識としているのかもしれないが，ガウスの定理を次のように述べている [1]p.35.

> 係数が整数なる多項式が有理数体 $\mathbb{Q}$ において可約ならば，分解した多項式の係数はみな整数でもあるようにして分解できる．

少なくとも多項式とは何かについての知識を持っているレベルでは，この定理を理解することはできない，無理である．

さらにガウスの定理については，数学者の中でもガウス自身による証明を直接に確かめた人はあまりいないと思う．もちろん素人の自分も含めて．

すこし，準備運動をしてから．

5.1 有理式

有理数 p, q について，四則演算は $q \neq 0$ であれば成立する．複素数係数の多項式 $p(x), q(x)$ で $q \neq 0$ のとき $p(x)/q(x)$ を有理式という．有理式全体についてその中で加減乗除ができるから，それは体のひとつである．

5.2 行列とその演算

行列 A が m 行 n 列のとき，$m \times n$ 行列と言う．

A の転置行列を ${}^{t}A$ と書く．${}^{t}A$ は，$n \times m$ 行列である．

${}^{t}A$ の (i, j) 成分は，A の (j, i) 成分である．

$m = n$ のとき A は正方行列と言う．

正方行列 A の行列式を $det(A)$ と書く．

A の跡 (trace) を $tr(A)$ と書く．

$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ に対して $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ である．

$$det(AB) = det(A)det(B) \tag{1}$$

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B) \tag{2}$$

$${}^{t}(AB) = {}^{t}(B) \cdot {}^{t}(A) \tag{3}$$

式1, 2 で A と B は正方行列で，

式3で A の列の数と B の行の数は等しければよい．

5.3 行列環

ここらで，抽象代数学の一歩として行列を復習する．

体 F を取り，F の元を成分とする n 次の正方行列の全体を $M_n(F)$ と書き，F 上の n 次の全行列環と呼ぶ．

たとえば，$M_n(\mathbb{R})$ は，成分が実数の n 次正方行列である．$M_n(F)$ の中で加・減・乗法はできるが除法はできない．

n 次の単位行列を 1_n とする．

$$det(A) \neq 0 \iff AB = 1_n B \in M_n(F) \iff CA = 1_n C \in M_n(F) \tag{4}$$

このとき，A の逆行列がただひとつ定まり，B と C は等しい．

A の逆行列を A^{-1} と書く．

さて整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は，除法について閉じていないから体ではなかった．しかし，加法，減法，乗法について閉じている．このように四則演算のうち，除法をのぞいて閉じている集合を，環 (ring) と言う．

そこで整数環は存在するというようなことが言える．

5.4 一般線形群と特殊線形群

5.5 整数と因数と環

5.6 多項式と環

5.7 有限体に向けて

6 代数学の基本定理

ガウス (1777-1855) は，次の定理を証明した．

定理 6.1 (ガウスによる代数学の基本定理)**.** *係数 $\alpha, \beta, \cdots, \gamma$ が複素数である方程式 (5) は，少くとも 1 つの複素数の根を持つ．*

(5) $$x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} + \cdots + \gamma = 0$$

ガウスが 20 歳のときに証明をしたという．

これについては，志村五郎が「今日の眼からみるととても証明とは言えないようなものであった．だから後世の教科書は『あれは間違っていた』とは言わず，その時代のレベルで正しい証明を書いたのである．」と書いている [6]．

さらに飯高茂によるとラプラス (1749-1827) が 1795 年に完全な証明を与えていたが，そのことをガウスはまったく知らなかったようであった [8]．

さらに飯高は，「ラプラスの証明は完全無欠ではあるが超技巧的である」と書いてあり，「かなり難しい」という．さらに「美しい証明とはいえない」．

代数学の基本定理には，複素関数論を使う証明，実解析による証明，ガロア理論を使う証明などもっと意味のある証明があるようだが，これらはさらに進んだ数学の理論が必要なので，初学者には無理ということだった．

6.1 代数学の基本定理の証明について

「ラプラスによる証明」[8] p.103 からの memo

n 次方程式 $f(z) = 0$ は必ず複素根 α を持つことを証明する．

この証明ができれば因数定理により

$$f(z) = (z - \alpha)g(z)$$

と n 次方程式の次数をさげた $n-1$ 次式 $g(z)$ を用いて書ける．さらに，$g(z)$ についても順次おなじよう

やり方を繰り返せば，$f(z)$ は n 個の複素根を持つことが証明される．

$f(z)$ は，実係数としてかまわない理由．

$f(z)$ が複素係数なら $f(z)$ の係数を複素共役にした多項式 $\bar{f}(z)$ との積 $f(z)\bar{f}(z)$ は実係数多項式である．$f(z)\bar{f}(z)$ が複素根 α を持つことが証明できれば $f(\alpha)\bar{f}(\alpha)=0$ になるから，$f(\alpha)=0$ または $\bar{f}(\alpha)=0$ が成り立つ．

$f(\alpha)=0$ のときは複素根 α を持つ．$\bar{f}(\alpha)=0$ のときはこの複素共役をとれば $f(\bar{\alpha})=0$ となるから，どちらにしろ $f(z)$ は複素根を持つ．

実数体 $\mathbb{R}$ の拡大体 $\mathbb{C}$ において $f(z)$ の根があることを証明するのだが，ちょっと準備する．

z について，複素係数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[z]$ と書く．

$\mathbb{C}[z]$ は，加法，減法，乗法について閉じているから環になる．
$f(z)$ を $\mathbb{C}[z]$ において因数分解する．
この因子に 1 次式があれば複素根を持つことになる．
…
…

$n=2^e \times k$ (k は奇数) の形に書き，e についての数学的帰納法をもちいる．

ここからあと超難解 …
なんで ????? の連続

7　方程式の根を求めるやり方

少し，中学生の視点に帰る．
中学，高校では方程式を解くという作業があることを知った．しかも解を求めるやり方があることも教わった．根の公式とも言った．「根」とは？の疑問にはあまりふれなかったのだが，「コン」のイメージが何やらマジックのようなベールをはがすような，ちょっと非日常的なもののような気がした．
数学の術語は中国由来ものが中心だった．只いつの時代のものかはあまり意識しなかった．論語の作者と比べて方程式という術語がどちらが古いのかなどは気にしなかった．論語は孔子の弟子たちが師の言行や哲学をまとめたものだが，方程式という言葉の起源もそれにおとらず古いことは中学・高校のときには知らなかった．さてその制作年代が，紀元前 1 世紀か 2 世紀といわれる 9 章からなる『九章算術』と呼ばれれる古い中国の数学書に「方程」の章がある．9 章のなかのおわりに近い第 8 章につけられている．方程とは量を比べるという意味のようで左辺と右辺の量を比べてそれが等しいといっているのだから，方程を現代風に

$$x+7=11$$

と書けば，未知の量 x に 7 を加えたものが，右辺の 11 と等しいというようなことを表しているのだろう．
しかし，この『九章算術』6には等号や加算などの記号はでてこない．

図6 『九章算術』より

7.1 2 次方程式の根を求める式

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

の根を，α, β とおく．

何故 2 つの根があるとするのか？3 つ以上はありえないのか？$x^2 - 1 = 0$ は α と β が等しいとみなすのか，など素朴な疑問はもちろんある．

それはとりあえずおいておく．すると，

この 2 次方程式を a で割って，さらに因数定理により，

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta) + \alpha\beta$$

この両辺の係数を比較することにより，

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \ \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

となる．これは未定係数法によって根と係数の関係を求めたことになる．未定係数法は，英語表記では，method of indeterminate coefficients と言う．

おそらく中学生のときに，

$$x^2 - ax + b = 0$$

の根と係数の関係は，因数分解と関連して $\alpha + \beta = a$，$\alpha\beta = b$ と記憶したのではないだろうか．

7.2　3 次方程式の根と係数の関係

このように，2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の根と係数の関係が，

$$\alpha + \beta = -a,\ \alpha\beta = b$$

となることをほぼ中学生くらいで知っている．

では，3 次方程式での根と係数の関係はどうだろうか．これは知っている人はそう多くない．

3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + x = 0$ の根 α，β，γ については，

$$\alpha + \beta + \gamma = -a,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b,\ \alpha\beta\gamma = -c$$

が成り立つ．これを導きだしたのは，フランソア・ヴィエト (1540-1603) であった．Wikipedia によれば綴は，François Viète となっている．一松信の『暗号の数理』によると，「彼は実は，アマチュアの数学者であった．ここでアマチュアというのは，数学を教えることを職業としていたのではなかったという意味である．彼の本職は，国王アンリ四世の黒幕であり，秘密諜報機関の親玉だった．実際，彼は暗号解読の名人であり，「せんさくの鬼」とあだ名されていたという」ことだ．しかし数学者としての才能と業績はすごい人物であった，あまり知られていないが円周率を小数点以下第 9 位まで ($3.141592653\cdots$) と正確に計算している．

Wikipedia では，彼はアンリ三世と四世の privy councillor であったと記している．ブルボン王朝の開祖としてアンリ大王とも四世は呼ばれた．ノストラダムスの時代であり，半世紀の宗教戦争が終息した頃であった．この影で諜報活動に力が入れられた．各国政府の暗号はほとんど解読されていたという．これにはヴィエトらの活躍があったと言われた．ただ最後にアンリ四世は暗殺されてしまった．

7.3　多項式と根と係数との関係

2 次 3 次について根と係数の関係を見た．4 次の根と係数の関係はあるのだろうということが想像される．さらに一般的な多項式を 0 とおいた方程式についても根と係数の関係を知りたくなるのは当然のことだ．

これまでの 2 次と 3 次の根と係数の関係式をながめてもなんとなく想像がわいてくる．

$$\alpha + \beta = -a,\ \alpha\beta = b$$

$$\alpha + \beta + \gamma = -a,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b,\ \alpha\beta\gamma = -c$$

多項式 $f(x)$ を 0 とおいた方程式をとりあげる．

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{6}$$

$f(x)$ が根 α_1 をもつとする．ここで因数定理により $f(x)$ は $(x - \alpha_1)$ で割り切れ，

$$f(x) = (x - \alpha_1)\varphi_1(x)$$

と書けることになる．

また $\varphi_1(x)$ が，α_1 と異なる根 α_2 をもてば，

$$f(\alpha_2)=(\alpha_2-\alpha_1)\varphi_1(\alpha_2)=0$$

から，

$$\varphi_1(\alpha_2)=0$$

である．

このことは α_2 が，$\varphi_1(x)$ の根であることを示す．したがって，因数定理により，

$$\varphi_1(x)=(x-\alpha_2)\varphi_2(x)$$

と書ける．

したがって，$f(x)=0$ が n 個の異なった根[*5] $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ をもつとき $f(x)$ は，因数定理により

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\varphi(x)$$

の形になる．

これを，$f(x)$ のもとの形

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

と比較すれば，$\varphi(x)$ は定数でなければならない．さらに x^n の係数 a_0 となることがわかる．

2 次方程式の根の式を求めるときのように，$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ を展開したのち，未定係数法により n 次方程式の根と係数の関係をえることができる．

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\dfrac{a_2}{a_0} \\ \cdots \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n=(-1)^{n-1}\dfrac{a_{n-1}}{a_0} \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0} \end{cases}$$

式7のなかで，右辺が $(-1)^k\dfrac{a_k}{a_0}$ の式の左辺のつくりかたを説明する．まず，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ の全部で n 個の根のなかから k 個選んでそれらの積をつくる．すると $\binom{n}{k}$ 個の項ができあがる．右辺が $(-1)^k\dfrac{a_k}{a_0}$ の左辺は，これら $\binom{n}{k}$ 個の項の和である．

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の根と係数の関係を式7にあてはめて確かめてみる．

$$\alpha_1=\alpha,\ \alpha_2=\beta,\ a_0=a,\ a_1=b$$

[*5] ここは重要な代数学の基本定理であり，証明しなければならない．ここでは証明されたものとしている．

とすれば，式7の一行目の式は，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

で成立する．式7の 2 行目は，

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

となって，式7を使って根と係数の関係は成り立つことがたしかめられた．3 次方程式についても同様に確認できる．

7.4 根の公式と対称式

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ について，式7から，根の公式を導く．

α と β の差を $\Delta=\beta-\alpha$ と定める．Δ^2 は，a, b であらわすことができる．実際に

$$\Delta^2=(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=a^2-4b$$

となる．したがって，

$$\left\{\begin{array}{l} 2\alpha=\alpha+\alpha=\alpha+\beta-\Delta=-a-\sqrt{a^2-4b} \\ 2\beta=\beta+\beta=\beta+\alpha+\Delta=-a+\sqrt{a^2-4b} \end{array}\right. \tag{8}$$

これが根の公式である．

対称式とは，英語では symmetric polynomial，すなわち多項式で変数を入れ替えても形がかわらない対称なものである．

$$x^2+y^2+z^2$$

$$xyz$$

$$(x-y)(x-z)(y-z)$$

上の 3 つの多項式のうち，上の 2 つは変数を入れ替えても変らないが，一番下の式は，どの 2 つの変数を入れ替えても符号が変わる．$x^2+y^2+z^2$ と xyz は対称式である．

さらに，次の 3 式を基本対称式と言う．

$$\left\{\begin{array}{l} p=x+y+z \\ q=xy+yz+zx \\ r=xyz \end{array}\right. \tag{9}$$

対称式は基本対称式で表せることが知られている．

実際にやってみる．

$$p^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yx+yz+zx+zy=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

したがって，

$$x^2+y^2+z^2=p^2-2q$$

のように対称式 $x^2+y^2+z^2$ は，基本対称式 p, q で表すことができた．

定理 **7.1.** ニュートンの定理，*Newton's identities* 対称式は基本対称式の式で表せる．

このニュートンによる恒等式 (Newtons's identities) は，1666 年頃にニュートンによって発見された．しかし，1629 年にすでに Albert Girard による研究は無視されていたようだ．17 世紀の数学研究の成果だが，その後のガロイ理論や一般相対性理論でも応用されている．

この Newton-Girard formulas については，Wolfram MathWorldに解説がある．

n 変数の関数 $F_T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を次のように定義する．

$$F_T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (-1)^n (x_1 - T)(x_2 - T) \cdots (x_n - T)$$

この F_T を T についての多項式とみると，

$$F_T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = T^n - a_1 T^{n-1} + \cdots + (-1)^n a^n$$

ここで係数 $a_1, \ldots, a_n$ は対称式になっている．

- $a_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$
- $a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,$

  $\vdots$
- $a_n = x_1x_2 \cdots x_n$

この式は，式7と同じで根と係数の関係になっている．

さて，次の 2 次方程式

$$x^2 - ax + b = 0$$

の根と係数の関係が $\alpha + \beta = a$，$\alpha\beta = b$ であるように，根の対称式を 2 次方程式の係数であらわすことができることを知った．

では，対称式 $\alpha^2 + \beta^2$ を a, b で表わすことができるだろうか．それは，

$F_2 = \alpha^2 + \beta^2$

とおけば，

$$\begin{aligned} & a^2 \\ = \ & (\alpha + \beta)^2 \\ = \ & \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \\ = \ & F_2 + 2b \end{aligned}$$

より，

$$F_2 = a^2 - 2b$$

となり，2 根の 2 乗の和は係数で表すことができる．2 根の対称式を係数で表すことができる．

このようにして，3 次方程式，4 次方程式，n 次方程式の根についての対称式も係数で表すことができるだろうか．

$$F_n = a^n + b^n$$

とする．

すると，$F_0 = 2$,$F_1 = a$ より，

$$F_2 = aF_1 - F_0 b$$

となる．

したがって漸化式

$$F_n = aF_{n-1} - bF_{n-2}$$

が，$n \geq 0$ について成立する．

7.5　3 次方程式の根の公式

次の 3 次方程式の根を $\alpha\beta\gamma$ とする．

$$T^3 - pT^2 + qT - r = 0 \tag{10}$$

α, β, γ について基本対称式を，

- $p = \alpha + \beta + \gamma$
- $q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$
- $r = \alpha\beta\gamma$

とおく．

2 次方程式のように，3 次方程式の 3 つの根についての漸化式をつくってみることにする．

…

…

やや省略したが，このあたりくらいの準備で，やっと窪田のガウスの定理やアイゼンスタインの定理の証明をする前段階くらいにたどりついたといえるだろうか．

しかし代数学の基本定理は，まだはるか彼方である．

因数定理，未定係数法のほかにもう少し，剰余定理と

四則演算とべき根とを組み合せて根の公式を定式化するためには，素数 p と p 乗根の話がいるのでまだ続く．

付録 A　窪田忠彦略歴と『初等幾何学作図問題』

『初等幾何学作図問題』巻末著者略歴による．

1885 年東京都麻布に生まれる
1907 年東京帝国大学卒業
1915 年理学博士
1914 年–1946 年東北帝国大学教授

昭和 27 年 1 月 25 日第 1 版発行
昭和 63 年 4 月 1 日第 5 版発行
平成 25 年 4 月 25 日第 5 版 2 刷発行

付録 B　古代ギリシアでの数

遠山啓『数学入門下』岩波新書に引用されているエピソードに，古代ギリシアでは数をアルファベットで表していたため，数が姓名判断に使われていた話が載っている．

トロイア戦争に登場したトロイア方の英雄ヘクトルとアカイア (ギリシア) 方の好敵手アキレウス，さてどちらが強いかを姓名判断で占うのである．

$$\begin{array}{lcl} E\kappa\tau\omega\rho & 5+20+300+800+100 & =1225 \\ A\chi\iota\lambda\epsilon\upsilon\sigma & 1+600+10+30+30+5+400+200 & =1276 \end{array}$$

ホメロスの『イリアス』によれば，トロイア戦争がはじまって 10 年目の最後の年のことであった．アキレスが戦いを拒否し，ギリシアの敗勢が濃くなる．トロイアの勇将ヘクトルがギリシア勢を海辺に追い詰めるにおよび，全ギリシア軍の総帥アガメムノンは莫大な褒賞を約束しアキレスを呼び戻そうとする……

B.1　記数法

古代ギリシアでは数を表すのにアルファベットを用いた．

A	1	α	*alpha*
B	2	β	*beta*
Γ	3	γ	*gamma*
Δ	4	δ	*delta*
E	5	ϵ	*epsilon*
Ϝ	6	ς	*digamma*
Z	7	ζ	*zata*
H	8	η	*eta*
Θ	9	θ	*theta*
I	10	ι	*iota*
K	20	κ	*kappa*
Λ	30	λ	*lambda*
M	40	μ	*mu*
N	50	ν	*nu*
Ξ	60	ξ	*xxi*
O	70	o	*omicron*
Π	80	π	*pi*
Ϙ	90	ϙ	*koppa*
P	100	ρ	*rho*
Σ	200	σ	*sigma*
T	300	τ	*tau*
Y	400	υ	*upsilon*
Φ	500	ϕ	*phi*
X	600	χ	*chi*
Ψ	700	ψ	*psi*
Ω	800	ω	*omega*
Ϡ	900	ϡ	*sampi*
$,\alpha$	1000		
$,\beta$	2000		
$,\Gamma$	3000		

ϵ は，イプシロンと言うことも多いが，この表では，英語の発音に近いエプシロンをとった．イータも古代ギリシア語ではエータが近いようだが英語にあわせてイータを選んだ．1000 以上については，うまく表示できず中途半端というか間違っている．あとで訂正したい．

付録 C　テアイテトス - Theaetetus of Athens)

生誕: およそ 417 年 BC

死亡: およそ 369 年 BC

アテネ出身の数学者

コリントス (Corinth) であったアテネの戦闘で傷を負い，赤痢にもかかり，それが死因となった．『テアイテトス』冒頭の話題から．

C.1　プラトン著『テアイテトス』

プラトンによる彼を主人公にしたソクラテスとの対話篇．

C.2　ユークリッド『原論』の第１０巻

C.3　無理数論

C.4　5 つの正多面体

付録 D　テオドロス Theodorus of Cyrene

古代ギリシアの幾何学者として有名である．

プラトンによるこのソクラテスとの対話篇で，もうすでに 70 歳をこえたソクラテスをまえに，
「今さら慣れるようにする齢でもありません」「私はこんなにもう身体のこわばっている者なんだから」
とことわっていることから，ソクラテスよりも老齢だったと推定．

D.0.1　テオドロスの螺旋

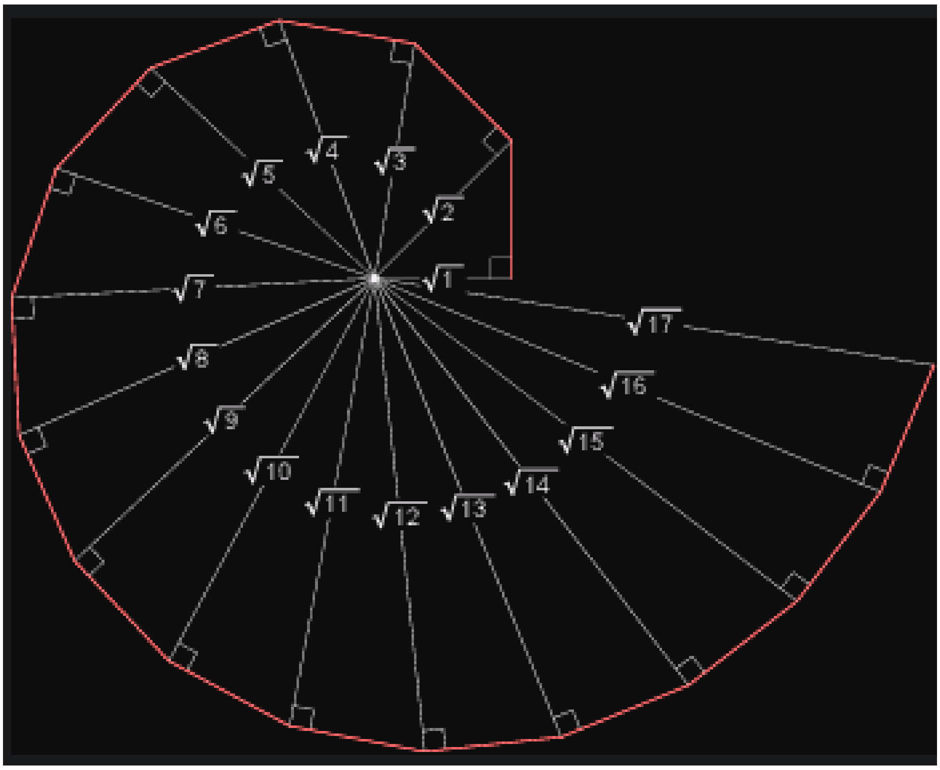


図7　テオドロスの螺旋 - 図は,Wolfram MathWorld, Theodorus Spiral(https://mathworld.wolfram.com/TheodorusSpiral.html) より

付録 E　maxima で数式を TeX ドキュメント用に出力

$x^3 - 3x - 1 = 0$ の根を求める．

Maxima で，

tex(%)

を使うと，

```
$$\left[ x=\left({{-1}\over{2}}-{{\sqrt{3}\,i}\over{2}}\right)\,
 \left({{\sqrt{3}\,i}\over{2}}+{{1}\over{2}}\right)^{{{1}\over{3}}}+
 {{{{\sqrt{3}\,i}\over{2}}+{{-1}\over{2}}}\over{\left({{\sqrt{3}\,i
 }\over{2}}+{{1}\over{2}}\right)^{{{1}\over{3}}}}} , x=\left({{\sqrt{
 3}\,i}\over{2}}+{{-1}\over{2}}\right)\,\left({{\sqrt{3}\,i}\over{2}}
 +{{1}\over{2}}\right)^{{{1}\over{3}}}+{{{{-1}\over{2}}-{{\sqrt{3}\,i
 }\over{2}}}\over{\left({{\sqrt{3}\,i}\over{2}}+{{1}\over{2}}\right)
 ^{{{1}\over{3}}}}} , x=\left({{\sqrt{3}\,i}\over{2}}+{{1}\over{2}}
 \right)^{{{1}\over{3}}}+{{1}\over{\left({{\sqrt{3}\,i}\over{2}}+{{1
 }\over{2}}\right)^{{{1}\over{3}}}}} \right] \leqno{\tt (\%o9)}$$
```

図8　Maxima で TeX コードで結果を表示

(%o9)

$$\left[x=\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}\,i}{2}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{\frac{\sqrt{3}\,i}{2}+\frac{-1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}\,i}{2}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}, x=\left(\frac{\sqrt{3}\,i}{2}+\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}\,i}{2}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}\,i}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}\,i}{2}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}, x=\left(\frac{\sqrt{3}\,i}{2}+\frac{1}{2}\right.\right.$$

参考文献

[1] 窪田忠彦. 初等幾何学作図問題. 内田老鶴圃, 東京都文京区. 1951.

[2] プラトン著，田中美知太郎訳．テアイテトス. 岩波文庫，東京都千代田区．2008.

[3] 訳・解説中村幸四郎・寺坂英孝・伊東俊太郎・池田美恵．ユークリッド原論追補版 *1* 刷. 共立出版，東京都文京区．2011.

[4] ラーデマッヘル，テープリッツ，訳．山崎三郎・鹿野健数と図形，ちくま学芸文庫．東京都台東区．2010.

[5] 遠山啓. 代数的構造電子版. ちくま学芸文庫，東京都台東区. 2018.

[6] 志村五郎．数学をいかに使うか．ちくま学芸文庫．東京都台東区．2010.

[7] 志村五郎. 数学の好きな人のために.，ちくま学芸文庫，東京都台東区. 2012.

[8] 飯高茂．体論，これはおもしろい，共立出版．東京都文京区，2013.

[9] ジョン・ダービーシャー，松浦俊輔．代数に惹かれた数学者たち，日経 BP 社，東京都港区．2008.

索引